Meccanica Analitica

Appunti (non rivisti) delle lezioni del professor d'Emilio

un progetto di

www.eigenlab.org

a cura di

Francesco Cicciarella

Note legali

Copyright © 2011-2012 di Francesco Cicciarella
Appunti di Meccanica Analitica
è rilasciato sotto i termini della licenza
Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Italia.
Per visionare una copia completa della licenza, visita
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode`

Liberatoria, mantenimento e segnalazione errori

Questo documento viene pubblicato, in formato elettronico, senza alcuna garanzia di correttezza del suo contenuto. Il testo, nella sua interezza, è opera di

`Francesco Cicciarella`
`<f[DOT]cicciarella[AT]inventati[DOT]org>`

e viene mantenuto dallo stesso, a cui possono essere inviate eventuali segnalazioni di errori.

Pisa, 10 Ottobre 2012

Indice

1 Richiami **3**

2 Formalismo Lagrangiano **5**
2.1 Proprietà della funzione Lagrangiana 6

3 Leggi di conservazione **7**
3.1 Energia 7
3.2 Momento 8
3.3 Centro di massa 9
3.4 Momento angolare 9

4 Elettromagnetismo **11**
4.1 Trasformazioni di gauge 12

5 Calcolo variazionale **13**

6 Oscillatori armonici **15**
6.1 Caso I - Oscillatore libero smorzato 15
6.2 Caso II - Oscillatore forzato 16

7 Piccole oscillazioni **19**
7.1 Richiami di algebra lineare 19

8 Problema dei due corpi **22**
8.1 Potenziale gravitazionale 25

9 Trasformazioni **28**

10 Formalismo Hamiltoniano **29**

11 Trasformazioni canoniche infinitesime **29**

12 Parentesi di Poisson e proprietà **31**

1 Richiami

Meccanica del punto

Dato un punto materiale di massa m e coordinata $\mathbf{r}$, funzione del tempo, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$, definiamo la velocità del punto, la sua quantità di moto e la forza agente sul punto rispettivamente come

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

Trovare la traiettoria di un punto, vuol dire risolvere l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\mathbf{a} \\ \\ \mathbf{r}(0) = r_0, \mathbf{v}(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Da questa notiamo che $\mathbf{F} \equiv 0$ implica $\mathbf{p}$ costante.
Dato un punto materiale dotato di impulso $\mathbf{p}$, definiamo il momento angolare rispetto a un polo O:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{1.3}$$

dove $\mathbf{r}$ è la distanza tra il polo e il punto materiale. Osserviamo adesso:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{n} \tag{1.4}$$

Definiamo dunque il momento della forza come la derivata rispetto al tempo del momento angolare.
Il lavoro compiuto da una forza su una particella è dato da:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \\ &= \int_1^2 m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right]\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = T_2 - T_1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove abbiamo introdotto l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$. Se la forza è tale che $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$, cioè è scrivibile come gradiente di un potenziale dipendente solo dalla distanza, allora

$$W_{12} = \int_1^2 -\nabla U(\mathbf{r}) d\mathbf{s} = U_1 - U_2 \tag{1.6}$$

dove abbiamo introdotto l'energia potenziale U. Eguagliando le due espressioni del lavoro così trovate, otteniamo il teorema di conservazione dell'energia:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \tag{1.7}$$

Sistemi di punti

Per un sistema formato da N punti materiali, le equazioni assumono la forma:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} \tag{1.8}$$

(che deve essere sommata sull'indice $\alpha = 1, \ldots, N$). Ma per il terzo principio di Newton, $\mathbf{F}_{\alpha\beta} = -\mathbf{F}_{\beta\alpha}$, allora

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha\right] = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\mathbf{F}_{\alpha\beta} - \mathbf{F}_{\beta\alpha}) = \\ &= \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Chiamo $M = \sum_\alpha m_\alpha$ e $\mathbf{P} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. L'equazione (1.8) diventa pertanto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P} \equiv M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext} \tag{1.10}$$

dove $M\mathbf{R} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha$ è la coordinata del baricentro del sistema. Osserviamo che se $\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{ext} = 0$, allora $\mathbf{P}$ si conserva.
Definiamo il momento angolare totale di un sistema di punti materiali come

$$\mathbf{L}_{tot} = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) \tag{1.11}$$

derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{p}}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{r}_\beta \mathbf{F}_{\beta\alpha}) = \\ &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} - \mathbf{r}_\beta \mathbf{F}_{\alpha\beta}) = \\ &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}[(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \times \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \\ &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} \end{aligned} \tag{1.12}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ è diretta lungo la congiungente tra i due punti. Definiamo dunque il momento delle forze totale:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{F}_\alpha^{ext} \tag{1.13}$$

2 Formalismo Lagrangiano

Consideriamo un certo sistema ad un dato istante t fisso. Vogliamo su di esso eseguire degli *spostamenti virtuali compatibili* $\delta\mathbf{r}_\alpha$, cioè tali che siano piccoli e coerenti con i vincoli del sistema e $\delta\dot{\mathbf{r}}_\alpha = 0$. Allora possiamo esprimere i $\delta\mathbf{r}_\alpha$ in termini delle coordinate lagrangiane q_k:

$$\delta\mathbf{r}_\alpha = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k \tag{2.1}$$

da cui:

$$\sum_\alpha (\dot{\mathbf{P}}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{ext} - \mathbf{F}_\alpha^{reaz}) \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = 0 \tag{2.2}$$

ma $\mathbf{F}_\alpha^{reaz} = 0$ perché i vincoli non compiono lavoro. Otteniamo dunque il principio di D'Alembert dei lavori virtuali:

$$\sum_\alpha (\dot{\mathbf{P}}_\alpha - \mathbf{F}_\alpha^{ext}) \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = 0 \tag{2.3}$$

I $\delta\mathbf{r}_\alpha$ sono linearmente dipendenti. Cerco di esprimerle in funzione delle coordinate lagrangiane q_k:

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}_\alpha^{ext} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha &= -\left(\mathbf{F}_\alpha^{ext} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \vec{\nabla}_{\mathbf{r}_\alpha} U \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k = \\ &= \frac{\partial}{\partial r_\alpha^i} U \cdot \frac{\partial r_\alpha^i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha &= m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha \delta\mathbf{r}_\alpha = m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k = \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial q_k}\right]\delta q_k = \end{aligned} \tag{2.5}$$

Poiché $\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_k}$, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_\alpha \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_k}\right) - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial q_k}\right]\delta q_k = \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2\right)\right]\delta q_k = \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]\delta q_k \end{aligned} \tag{2.6}$$

Quindi il principio di D'Alembert in termini delle coordinate lagrangiane diventa

$$\delta q_k \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}\right)T + \frac{\partial}{\partial q_k}U\right] = \delta q_k \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-U) - \frac{\partial}{\partial q_k}(T-U)\right] = 0, \quad k = 1, \ldots, N \tag{2.7}$$

Definiamo a questo punto la funzione *Lagrangiana* $\mathcal{L}$ come $\mathcal{L} = T - U$. Avremo a questo punto le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{2.8}$$

che restituiscono direttamente le equazioni del moto.

2.1 Proprietà della funzione Lagrangiana

Consideriamo due Lagrangiane $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ e $\mathcal{L}'(q, \dot{q})$ che differiscono per la derivata totale rispetto al tempo di una funzione $F \equiv F(q, t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q, t) = \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Definiamo il *momento canonico generalizzato* $p_\alpha := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}$. Allora si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_\alpha} = p'_\alpha = p_\alpha + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \tag{2.10}$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \tag{2.11}$$

Ma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

dunque concludiamo che le equazioni del moto generate da $\mathcal{L}'$ sono le stesse di quelle generate da $\mathcal{L}$. In generale, *due Lagrangiane che differiscono per la derivata totale di una certa funzione generano le stesse equazioni del moto.*

Se la Lagrangiana non dipende da una certa coordinata q_α, detta *coordinata ciclica*, (può tuttavia dipendere dalle sue derivate), allora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{2.12}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue che il momento canonico p_α si conserva, infatti:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{2.13}$$

3 Leggi di conservazione

Durante il moto di un sistema meccanico, le $2n$ quantità q_i e $\dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ che caratterizzano lo stato del sistema variano nel tempo. Tuttavia, esistono funzioni di queste quantità che rimangono costanti durante il moto, e dipendono solamente dalle condizioni iniziali. Tali funzioni sono chiamate *integrali primi del moto*. Il numero di integrali primi indipendenti per un sistema con n gradi di libertà è $2n - 1$.

3.1 Energia

La prima legge di conservazione discende dall'omogeneità del tempo. In virtù di tale omogeneità, la Lagrangiana di un sistema chiuso non dipende esplicitamente dal tempo. La derivata totale rispetto al tempo della Lagrangiana può essere quindi scritta

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

Sostituendo $\partial\mathcal{L}/\partial q_i$ in accordo con le equazioni di Eulero-Lagrange, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \\ &= \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\end{aligned}$$

ovvero, per linearità dell'operatore derivata:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}\right) = 0$$

Notiamo che la quantità

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{3.1}$$

rimane costante durante il moto, cioè è un integrale primo del moto; essa è detta *energia* del sistema. Sappiamo che in un sistema chiuso la Lagrangiana è della forma $\mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - U(q)$, con T funzione quadratica delle velocità, data da

$$\begin{aligned}T &= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{r}_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,k,l} m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l = \\ &= \sum_{\alpha,k,l} F_{kl}(q_1, \ldots, q_N)\dot{q}_k\dot{q}_l\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i &= \sum_{k,l}\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}[F_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l] = \sum_{k,l} F_{kl}\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}[\dot{q}_k\dot{q}_l] = \\ &= \sum_{k,l} F_{kl}\sum_i (\delta_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_l + \delta_{il}\dot{q}_i\dot{q}_k) = \sum_{k,l}(F_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l + F_{kl}\dot{q}_l\dot{q}_k) = \\ &= T + T = 2T\end{aligned}$$

Da ciò concludiamo che T è omogenea di grado 1. Dunque, sostituendo quanto trovato in (3.1):

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T(q, \dot{q}) + U(q) \tag{3.2}$$

che coincide con la nota espressione dell'energia meccanica di un sistema.

3.2 Momento

Una seconda legge di conservazione deriva dall'omoegeneità dello spazio. In virtù di tale omigeneità, le proprietà meccaniche di un sistema chiuso rimangono invariante per ogni spostamento congruo dell'intero sistema. Consideriamo uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{\epsilon}$ e ricaviamo la condizione per cui la Lagrangiana rimane invariata. Uno spostamento congruo è una trasformazione in cui ogni punto del sistema è spostato della stessa quantità e nella stessa direzione, e quindi il raggio vettore $\mathbf{r}$ diventa $\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}$. La variazione della Lagrangiana per una variazione infinitesima delle coordinate, le velocità delle particelle rimanenti fisse, è

$$\delta\mathcal{L} = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_\alpha}$$

Dato che $\boldsymbol{\epsilon}$ è arbitrario, la condizione $\delta\mathcal{L} = 0$ è equivalente a

$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue che

$$\sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = 0.$$

Concludiamo quindi che, in un sistema meccanico chiuso, il vettore

$$\mathbf{P} \equiv \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \tag{3.4}$$

rimane costante durante il moto; $\mathbf{P}$ è detto *momento* o *quantità di moto* del sistema. Differenziando la Lagrangiana $\mathcal{L} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 - U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)$, troviamo che il momento è dato in termini delle velocità delle particelle da

$$\mathbf{P} \equiv \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \tag{3.5}$$

L'additività del momento è evidente. In più, a differenza dell'energia, il momento del sistema è uguale alla somma dei momenti $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ delle singole particelle.
L'equazione (3.3) ha un semplice significato fisico. La derivata $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{r}_\alpha = -\partial U/\partial\mathbf{r}_\alpha$ è la forza $\mathbf{F}_\alpha$ che agisce sulla particella α-esima. Quindi l'equazione (3.3) significa che la somma delle forze agenti su tutte le particelle in un sistema chiuso è zero [1]

$$\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = 0 \tag{3.6}$$

Se il moto è descritto per mezzo di coordinate generalizzate q_i, le derivate della Lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.7}$$

sono chiamate *momenti generalizzati*, e le derivate della Lagrangiana rispetto alle coordinate generalizzate

$$F_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{3.8}$$

sono chiamate *forze generalizzate*. In questa notazione, le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\dot{p}_i = F_i \tag{3.9}$$

In coordinate cartesiane, i momenti generalizzati sono le componenti dei vettori $\mathbf{p}_\alpha$. In generale, tuttavia, le p_i sono funzioni omogenee lineari delle velocità generalizzate $\dot{q}_i$ e non si riducono a prodotti di massa e velocità.

[1] In particolare, per un sistema di sole due particelle, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$, che coincide con la *terza legge di Newton*.

3.3 Centro di massa

Il momento di un sistema meccanico chiuso assume valori diversi in diversi sistemi di riferimento inerziali. Se un sistema di riferimento K' si muove con velocità $\mathbf{V}$ relativamente a un altro sistema di riferimento K, allora le velocità $\mathbf{v}'_\alpha$ e $\mathbf{v}_\alpha$ delle particelle relative ai due sistemi di riferimento sono tali che $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{V}$. I momenti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$ nei due sistemi di riferimento sono dunque legati da

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{V} \sum_\alpha m_\alpha$$

oppure

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{V} \sum_\alpha m_\alpha \tag{3.10}$$

In particolare, esiste sempre un sistema di riferimento K' in cui il momento totale è zero. Imponendo $\mathbf{P}' = 0$ nella (3.10), troviamo la velocità di tale sistema di riferimento:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} \tag{3.11}$$

Questa formula mostra che la relazione fra il momento $\mathbf{P}$ e la velocità $\mathbf{V}$ del sistema è la stessa di quella che sussiste fra il momento e la velocità di una singola particella di massa $M = \sum m_\alpha$, la somma delle masse delle particelle del sistema. Il secondo membro della (3.11) può essere scritto come la derivata totale rispetto al tempo della quantità

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{\sum m_\alpha} \tag{3.12}$$

Possiamo affermare che la velocità del sistema nel suo complesso è la variazione della posizione nello spazio del punto il cui raggio vettore è $\mathbf{R}$. Questo punto è chiamato *centro di massa* del sistema.
La legge di conservazione del momento per un sistema chiuso può essere riformulata dicendo che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme.
L'energia di un sistema meccanico che è nel complesso a riposo è solitamente chiamata *energia interna* E_i. L'energia totale di un sistema che si muove nel complesso con velocità V può essere scritta

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + E_i \tag{3.13}$$

Infatti le energie E e E' di un sistema in due sistemi di riferimento K e K' sono legate da

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 + U = \\ &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{V})^2 + U = \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v'^2_\alpha + U = \\ &= E' + \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}' + \frac{1}{2} M V^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Se il centro di massa è a riposo in K', allora $\mathbf{P}' = 0$, $E = E_i$ e si ottiene la (3.13).

3.4 Momento angolare

Deriviamo adesso la legge di conservazione che discende dall'isotropia dello spazio. Questa isotropia implica che le proprietà meccaniche di un sistema chiuso non cambiano quando esso è ruotato interamente in qualunque maniera nello spazio. Consideriamo quindi una rotazione infinitesima del sistema, e otteniamo la

condizione affinché la Lagrangiana rimanga invariata.
Usiamo il vettore $\delta\boldsymbol{\phi}$ per indicare una rotazione infinitesima, il cui modulo è l'angolo di rotazione $\delta\phi$ e la cui direzione è quella dell'asse di rotazione. Ricaviamo innanzitutto la variazione del raggio vettore da un'origine sull'asse a una qualunque particella del sistema. Lo spostamento è collegata alla rotazione da $|\delta\mathbf{r}| = r\sin\theta\delta\phi$, dove θ è l'angolo compreso fra l'asse di rotazione e $\mathbf{r}$. La direzione di $\delta\mathbf{r}$ è perpendicolare al piano individuato dai vettori $\mathbf{r}$ e $\delta\boldsymbol{\phi}$. Risulta chiaro dunque che

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} \tag{3.15}$$

Inoltre, quando il sistema ruota, anche le velocità delle particelle variano in direzione secondo la relazione

$$\delta\mathbf{v} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v} \tag{3.16}$$

Scriviamo a questo punto la condizione che la variazione della Lagrangiana sia nulla:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{r}_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{v}_\alpha} \cdot \delta\mathbf{v}_\alpha \right) = 0$$

Sostituendo (3.15) e (3.17) in (3.16), e ricordando che $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha$ e $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{r}_\alpha = \dot{\mathbf{p}}_\alpha$, otteniamo:

$$\sum_\alpha (\dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \cdot \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_\alpha) = 0$$

Permutando ciclicamente i fattori e portando $\delta\boldsymbol{\phi}$ fuori dalla sommatoria,

$$\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times \dot{\mathbf{p}}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha) = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = 0$$

Dato che $\delta\boldsymbol{\phi}$ è arbitrario, segue che $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\sum \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = 0$, e concludiamo che il vettore

$$\mathbf{L} \equiv \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha \tag{3.17}$$

chiamato *momento angolare* del sistema, è conservato durante il moto in un sistema chiuso. Come il momento, esso è additivo.

4 Elettromagnetismo

L'equazione del moto in presenza di campi elettrico e magnetico è data da

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{4.1}$$

Dove e è la carica dell'elettrone, $\mathbf{v}$ è la sua velocità, $\mathbf{E}$ è il campo elettrico, $\mathbf{B}$ il campo magnetico e $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ è la velocità della luce nel vuoto. Il secondo membro rappresenta la *forza di Lorentz generalizzata*. Dalle equazioni di Maxwell, sappiamo che $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. Poiché $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, allora $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dove $\mathbf{A}$ è il potenziale vettore del campo magnetico. Introduciamo il simbolo di Ricci ϵ_{ijk},

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{se } (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{se } (i,j,k) = (3,2,1),(1,3,2),(2,1,3) \\ 0 & \text{se due indici sono uguali} \end{cases}$$

Tramite il simbolo di Ricci è possibile esprimere i prodotti vettoriali: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$ [2]. Vale inoltre la relazione $\epsilon_{ijk}\epsilon_{abk} = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}$.
L'espressione della divergenza del campo magnetico può essere allora riscritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla_i B_i = \nabla_i(\nabla \times \mathbf{A})_i = \nabla_i\epsilon_{ijk}\nabla_j A_k = \epsilon_{ijk}\nabla_i\nabla_j A_k = 0 \tag{4.2}$$

E parimenti, l'espressione del rotore del campo elettrico diventa

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

cioè

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Se un vettore ha rotore nullo, allora esso può essere scritto come il gradiente di una funzione scalare cambiato di segno, quindi

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \tag{4.3}$$

Φ rappresenta il potenziale scalare del campo elettrico. Allora, sostituendo nell'espressione della forza di Lorentz i valori dei campi, otteniamo

$$\begin{aligned} F_i &= e\left[-\nabla\Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}(\epsilon_{ijk}v_j(\nabla \times \mathbf{A})_k)\right] = \\ &= e\left[-\nabla_i\Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}(\epsilon_{ijk}\epsilon_{lkm}v_j\nabla_l A_m)\right] = \\ &= e\left[-\nabla_i\Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}((\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\nabla_l A_m)\right] = \\ &= e\left[-\nabla_i\Phi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}(v_j\nabla_j A_i - v_l\nabla_l A_i)\right] = \\ &= e\left[-\nabla_i\left(\Phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{c}\nabla\cdot\mathbf{v}\right)A_i\right] = \\ &= e\left[-\nabla_i\left(\Phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\Phi - \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pertanto la Lagrangiana di un elettrone che si muove in presenza di campi elettrico e magnetico sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\left(\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right) \tag{4.5}$$

[2] In queste espressioni si usa la notazione di Einstein, ovvero sono omesse le sommatorie sugli indici ripetuti, i.e. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}a_jb_k$.

4.1 Trasformazioni di gauge

Una *trasformazione di gauge* è una particolare trasformazione dei potenziali $\mathbf{A}$ e Φ così definita:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t) \\ \\ \Phi_1 \to \Phi_2 = \Phi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t) \end{cases} \tag{4.6}$$

dove $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ è una generica funzione scalare. Osserviamo che

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Lambda) = \nabla \times \mathbf{A}_1 + \nabla \times \nabla\Lambda$$

Ma, posto $\mathbf{P} = \nabla\Lambda$, allora risulta $\nabla \times \mathbf{P} = 0$, dunque si ottiene

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= -\nabla\Phi_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} = -\nabla\Phi_1 + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda = \\ &= -\nabla\Phi_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = \mathbf{E}_1 \end{aligned}$$

Dunque i potenziali ottenuti tramite una trasformazione di gauge generano i medesimi campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Ci aspettiamo similmente che la Lagrangiana scritta in termini dei potenziali $\mathbf{A}_2, \Phi_2$ sia la stessa di quella scritta in termini di $\mathbf{A}_1, \Phi_1$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\left(\Phi_2 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\cdot\mathbf{A}_2\right) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\left(\Phi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\cdot\mathbf{A}_1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\cdot\nabla\Lambda\right) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\left(\Phi_1 - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\cdot\mathbf{A}_1\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\Lambda\right) = \\ &= \mathcal{L}_1 + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Poiché le due Lagrangiane differiscono per la derivata totale rispetto al tempo di $\Lambda(\mathbf{r}, t)$, esse generano entrambe le equazioni (4.1). Dunque si conclude che la Lagrangiana è invariante per trasformazione di gauge.

5 Calcolo variazionale

Consideriamo un sistema costituito da una particella di massa m che si muove sotto l'effetto del campo gravitazionale fra due punti di coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Vogliamo trovare la traiettoria che congiunge i due punti per cui il tempo di percorrenza è minimo. Sappiamo che in generale è $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/\mathbf{v}$. Allora il tempo di percorrenza τ è dato da

$$\begin{aligned}
\tau = \int_0^\tau \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gx}} = \\
= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \\
= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} \mathrm{d}x \equiv \tau[y(x)]_{x_0}^{x_1}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Dunque si tratta di minimizzare il funzionale $\tau[y(x)]$ nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Se $y(x)$ è la funzione che lo minimizza, allora per ogni incremento $\delta y(x)$ si ha $\tau[y(x)] < \tau[y(x) + \delta y(x)]$. In generale, si ha

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) \mathrm{d}x \tag{5.2}$$

Eseguiamo la trasformazione

$$\begin{cases} y(x) \longmapsto y(x) + \delta y(x) \\ \\ y'(x) \longmapsto y'(x) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \delta y(x) = y'(x) + \delta y'(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

L'incremento del funzionale I sarà allora dato da:

$$\begin{aligned}
I[y(x) + \delta y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) = \\
= \int_{x_0}^{x_1} \left[F(y, y', x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) \right] \mathrm{d}x = \\
= \int_{x_0}^{x_1} F(y, y', x) \mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x = \\
= I[y(x)] + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.4}$$

A questo punto imponiamo che la variazione del funzionale $\delta I = I[y + \delta y] - I[y]$ sia nulla, a condizione che la variazione di y si annulli agli estremi, ossia $\delta y(x_1) = \delta y(x_0) = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \\
= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \, \mathrm{d}x + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \, \mathrm{d}x = 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Il secondo termine è identicamente nullo in quanto abbiamo supposto che la variazione δy si annulli agli estremi. Abbiamo dunque

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y \, \mathrm{d}x = 0 \tag{5.6}$$

Poiché δy è arbitrario, dobbiamo imporre che il termine in parentesi sia identicamente nullo, ottenendo così le ben note equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5.7}$$

Nel nostro caso, F non dipende esplicitamente da y ($F = \sqrt{(1+y'^2)/x}$), quindi y è una coordinata ciclica e di conseguenza il momento generalizzato coniugato $\partial F/\partial y'$ è costante:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = c \tag{5.8}$$

Da questa espressione ricaviamo il valore di y' in funzione di x (ponendo $c^2 = C$):

$$y' = \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}} \tag{5.9}$$

Integrando, infine, troviamo l'equazione della traiettoria che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\int \mathrm{d}y = \int \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}}\mathrm{d}x \Longrightarrow y - K = \int \sqrt{\frac{Cx}{1-Cx}}\mathrm{d}x$$

Effettuando la sostituzione $x = \cos^2\theta/C$, $\mathrm{d}x = -\frac{2}{c}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$ troviamo:

$$\begin{aligned} y - K &= \int -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{2}{C}\cos\theta\sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \\ &= -\frac{2}{C}\int \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = -\frac{2}{C}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{C}\int \mathrm{d}\theta - \frac{1}{C}\cos 2\theta\ \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{C}\theta + \frac{1}{2C}\sin 2\theta \end{aligned} \tag{5.10}$$

Posto $2\theta = t$, troviamo le equazioni parametriche della curva che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2C}(1+\cos t) \\ \\ y = K + \dfrac{1}{2C}(t+\sin t) \end{cases} \tag{5.11}$$

che rappresentano una cicloide.

6 Oscillatori armonici

Un oscillatore armonico, nella forma più generale, è descritto da un'equazione del tipo

$$m\ddot{q}(t) = -\beta\dot{q}(t) - kq(t) + f(t), \qquad \beta, k > 0 \tag{6.1}$$

6.1 Caso I - Oscillatore libero smorzato

Nell'oscillatore libero smorzato si ha $f(t) \equiv 0$, quindi l'equazione del moto è

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + kq = 0$$

Dividendo per m e ponendo $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = \beta/m$ si ottiene

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) q = 0 \tag{6.2}$$

Cerchiamo una soluzione della forma $q(t) = Ae^{i\alpha t}$. Sostituendo, si ottiene

$$(-\alpha^2 + i\alpha\gamma + \omega_0^2)e^{i\alpha t} = 0$$

Poiché $e^{i\alpha t} \neq 0$ sempre, si ha che l'uguaglianza è verificata per i valori di α che verificano l'equazione

$$\alpha^2 - i\alpha\gamma - \omega_0^2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha = \frac{i\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{6.3}$$

Definiamo il *fattore di qualità* dell'oscillatore Q come $Q = 1/\gamma$. Abbiamo dunque

$$\alpha = \frac{i}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{1}{Q^2}} \tag{6.4}$$

Esaminiamo i vari casi. Se $\omega_0^2 > 1/Q^2$, le soluzioni della (5.2) saranno

$$q(t) = e^{i\left(\frac{i}{2Q} \pm \Omega\right)t} = e^{-t/2Q}e^{\pm i\Omega t}, \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q\omega_0)^2}} \tag{6.5}$$

Osserviamo che la presenza del fattore $e^{-t/2Q}$ implica sottosmorzamento delle oscillazioni.
Nel caso in cui $\omega_0^2 \gg 1/4Q^2$, avremo un oscillatore lievemente smorzato. Scriviamo le due soluzioni indipendenti nella forma

$$q(t) = A_c e^{-t/2Q}\cos\Omega t + A_s e^{-t/2Q}\sin\Omega t \tag{6.6}$$

Nell'approssimazione di smorzamento lieve, $A_c e^{-t/2Q} \simeq A_s e^{-t/2Q} = A$. L'energia dell'oscillatore sarà data da

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \simeq A_{c,s}e^{-t/Q} \tag{6.7}$$

dunque l'energia diminuisce seguendo un decadimento esponenziale.
Nel caso $\omega_0^2 < 1/Q^2$, abbiamo l'oscillatore *sovrasmorzato.* Le soluzioni in questo caso, entrambi reali, saranno:

$$q(t) = e^{i\left(\frac{i}{2Q} \pm i\Omega\right)t} = e^{-t/2Q}e^{\pm\Omega t}, \qquad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q\omega_0)^2}} \tag{6.8}$$

Nel caso $\omega_0^2 = 1/4Q^2$, avremo l'oscillatore *criticamente smorzato.* In questo caso avremo una sola soluzione indipendente

$$q_1(t) = e^{-t/2Q} \tag{6.9}$$

Per trovare la seconda soluzione indipendente, la cerchiamo nella forma $q_2 = q_1(t)g(t)$. La sostituzione nell'equazione dell'oscillatore restituisce:

$$\ddot{q}_1 f + 2\dot{q}_1\dot{g} + q_1\ddot{g} + \frac{1}{Q}\dot{q}_1 g + \frac{1}{Q}q_1\dot{g} + \omega_0^2 q_1 g = 0 \tag{6.10}$$

cioè

$$g\left(\ddot{q}_1 + \frac{1}{Q}\dot{q}_1 + \omega_0^2 q_1\right) + \dot{g}\left(2\dot{q}_1 + \frac{1}{Q}q_1\right) + q_1\ddot{g} = 0 \tag{6.11}$$

Il coefficiente di g è nullo in quanto q_1 è soluzione dell'equazione. Rimane pertanto

$$\dot{g}\left(2\dot{q}_1 + \frac{1}{Q}q_1\right) + q_1\ddot{g} = 0 \Longleftrightarrow \dot{g}\left(-\frac{1}{Q}e^{-t/2Q} + \frac{1}{Q}e^{-t/2Q}\right) + q_1\ddot{g} = 0 \tag{6.12}$$

E dunque

$$q_1\ddot{g} = 0 \Longrightarrow \ddot{g} = 0 \tag{6.13}$$

in quanto $q_1 \neq 0$. Integrando due volte troviamo infine $g(t) = at + b$. Quindi la soluzione generale per l'oscillatore criticamente smorzato sarà

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) = e^{-t/2Q} + (at+b)e^{-t/2Q} = (at+b+1)e^{-t/2Q} \tag{6.14}$$

6.2 Caso II - Oscillatore forzato

Inseriamo adesso un termine di sorgente $f(t)$ (non consideriamo però in prima analisi il termine di smorzamento, i.e $\gamma = 0$). L'equazione sarà allora

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = f(t) \tag{6.15}$$

ovvero

$$Oq = f(t), \qquad O \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \tag{6.16}$$

Scomponiamo la sorgente in sorgenti puntiformi e cerchiamo una funzione $G(t)$ tale che

$$OG(t) = \delta(t) \tag{6.17}$$

dove $\delta(t)$ è la *delta di Dirac*. Effettuando una traslazione otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}G(t-t') + \omega_0^2 G(t-t') = \delta(t-t') \tag{6.18}$$

Allora la funzione

$$q(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t-t')f(t') \tag{6.19}$$

è soluzione della (6.15). Infatti:

$$\begin{aligned} O_t q(t) &= O_t \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' G(t-t')f(t') = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' O_{t'} G(t-t')f(t') = \\ &= \int \mathrm{d}t' \delta(t-t')f(t') = f(t) \end{aligned}$$

Indicando con G_R la funzione tale che $OG_R = \delta$, allora $\forall \alpha, \beta$ la funzione $G(t) = G_R(t) + \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$ è soluzione dell'equazione, dove $\alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$ è soluzione dell'omogenea associata $OG = 0$. Abbiamo come condizioni iniziali $G(0) = 0$ e $\dot{G}(0) = 1$. Imponendole troviamo

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{\omega_0}$$

Dunque la funzione

$$G_R = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \qquad (t > 0)$$

risolve $OG_R = \delta$, e pertanto

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' G_R(t - t') f(t'), \qquad G_R(t - t') = \begin{cases} 0 & \text{se } t - t' < 0 \\ \\ \dfrac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - t')) & \text{se } t - t' > 0 \end{cases}$$

risolve $Oq = f(t)$. In particolare, poiché $t - t' < 0$ per $t' > t$, l'espressione di q si riduce a

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - t')) f(t') \tag{6.20}$$

Riprendiamo in esame l'equazione dell'oscillatore smorzato e forzato:

$$\ddot{q} + \frac{1}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = f(t) \tag{6.21}$$

Ed applichiamo lo stesso ragionamento: cerchiamo una funzione G che risolve

$$\ddot{G} + \frac{1}{Q} \dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \tag{6.22}$$

Si ha, pertanto:

$$G_R(t) = \frac{e^{-t/2Q}}{\Omega} \sin \Omega t, \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4Q^2}} \tag{6.23}$$

Indicando con q_{om} la soluzione dell'equazione omogenea associata a (6.21) si ottiene:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(t-t')/2Q}}{\Omega} \sin(\Omega (t - t')) f(t') \mathrm{d}t' + q_{om} \tag{6.24}$$

Se $\omega_0^2 \gg 1/4Q^2$, allora $\Omega \sim \omega_0$. Scriviamo inoltre $f(t) = f_0 \sin \omega t$. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} q(t) &= f_0 \int_0^t \frac{e^{-(t-t')/2Q}}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - t')) \sin \omega t' \mathrm{d}t' + q_{om} = \\ &= \frac{f_0}{2i\omega_0} e^{-t/2Q} \int_0^t e^{t'/2Q} (e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t'} - e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t'}) \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \mathrm{d}t' + q_{om} \end{aligned}$$

Se $t \gg Q$, $q_{om} \simeq 0$:

$$\begin{aligned} &= -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{i(\omega - \omega_0 - i/2Q)t'} - e^{i(-\omega - \omega_0 - i/2Q)t'} \right] e^{i\omega_0 t} + \right. \\ &\left. + \left[e^{i(-\omega + \omega_0 - i/2Q)t'} - e^{i(\omega + \omega_0 - i/2Q)t'} \right] e^{-i\omega_0 t} \right\} \mathrm{d}t' = \end{aligned}$$

I termini aventi ω e ω_0 di segno concorde tendono a zero e possono essere trascurati:

$$= -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{t'/2Q + i[(\omega-\omega_0)t' + \omega_0 t]} + e^{t'/2Q - i[(\omega-\omega_0)t' + \omega_0 t]} \right] \mathrm{d}t'$$

Poiché sto sommando un numero e il suo complesso coniugato (c.c), prendo due volte la parte reale:

$$\begin{aligned} q(t) &\simeq -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} \cdot e^{i(\omega-\omega_0-i/2Q)t'} \Big|_0^t}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] = \\ &= -\frac{f_0}{4\omega_0} e^{-t/2Q} \left[e^{i\omega_0 t} \frac{e^{i(\omega-\omega_0-i/2Q)t} - 1}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] = \end{aligned}$$

Per $t \gg Q$, si ha $e^{-t/Q} \ll 1$, quindi il termine può essere trascurato per tempi lunghi:

$$\begin{aligned} &= -\frac{f_0}{4\omega_0} \left[\frac{e^{i\omega_0 t} e^{i(\omega-\omega_0)t}}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \right] = \\ &= -\frac{f_0}{4\omega_0} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega-\omega_0-i/2Q)} + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Questa rappresenta l'espressione della soluzione generale dell'equazione del moto. L'energia dell'oscillatore infine sarà data da

$$E(\omega) = |q(t)|^2 = \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + 1/4Q^2} \tag{6.26}$$

Osserviamo che l'energia si distribuisce, in funzione della frequenza, secondo una Lorentziana.

7 Piccole oscillazioni

7.1 Richiami di algebra lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul corpo complesso e u, v, w i suoi elementi, denotati $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle$. Un *prodotto scalare* su V è un'applicazione $(,) : V \times V \to \mathbb{C}$ denotato con $(u, v) = \langle u| \cdot |v\rangle = \langle u|v\rangle$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $\langle u|\lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u|v\rangle + \mu\langle u|w\rangle$ (linearità nella seconda variabile);
2. $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$ (sesquilinearità nella prima variabile);
3. $\langle u|v\rangle = 0\ \forall v \Longleftrightarrow u \equiv 0$ (non degenerazione del prodotto scalare).

Un prodotto scalare non degenere induce una *norma* $||u||^2 = \langle u|u\rangle$ con le seguenti proprietà

1. $||\lambda u|| = |\lambda|||u||, \forall\lambda \in \mathbb{C}$;
2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (disuguaglianza triangolare);
3. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u \equiv 0$.

Trasformazioni lineari Hermitiane

Sia T un operatore lineare e $u, v \in V$. Consideriamo il seguente prodotto scalare:

$$(u, Tv) = u_i^* T_{ij} v_j = T_{ij} u_i^* v_j = ({}^t T_{ij}^* u_i)^* v_j = (T^\dagger u, v)$$

dove

$$(T^\dagger)_{ij} := ({}^t T)_{ij}^* \tag{7.1}$$

è l'operatore *aggiunto* di T. In particolare, un operatore T si dice *hermitiano* se è autoaggiunto, cioè $T = T^\dagger$. Introducendo la *notazione di Dirac*:

$$\langle Tu|v\rangle = \langle u|Tv\rangle \equiv \langle u|T|v\rangle$$

Un operatore ammette un *sistema completo di autovalori* quando

$$T|k\rangle = \lambda_k|k\rangle, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{7.2}$$

Un'osservazione significativa è che *gli autovalori di un operatore Hermitiano sono tutti reali.* Infatti:

$$\langle k|T|k\rangle = \begin{cases} \lambda_k\langle k|k\rangle & \text{se } T \text{ agisce a destra} \\ \\ \lambda_k^*\langle k|k\rangle & \text{se } T \text{ agisce a sinistra} \end{cases} \tag{7.3}$$

Allora $(\lambda_k - \lambda_k^*)\langle k|k\rangle = 0$. Ma $\langle k|k\rangle = ||k||^2$ è sicuramente diverso da zero, dunque risulta $\lambda_k = \lambda_k^*$ e quindi $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
Se un operatore T è Hermitiano, allora:

- T ha tutti gli autovalori reali.
- Autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

Abbiamo dunque:

$$|k\rangle\langle k|l\rangle = 0, \qquad |k\rangle\langle k|k\rangle = |k\rangle \tag{7.4}$$

$$|k\rangle\langle| \left(\alpha|k\rangle + \sum_{l\neq k} \beta_l|l\rangle \right) = \alpha|k\rangle$$

Si definisce di conseguenza un *operatore di proiezione* o *proiettore*:

$$P_k \equiv |k\rangle\langle k| \tag{7.5}$$

Valgono i seguenti fatti:

- $P_k^2 = P_k$.

- I proiettori sono operatori Hermitiani.
- $\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbb{I}_{n\times n}$.

Se un operatore T è Hermitiano, quindi ammette un set completo di autovettori, allora la sua *decomposizione spettrale* sarà

$$T = \sum_k |k\rangle\lambda_k\langle k| \tag{7.6}$$

Si verificha che l'operatore inverso T^{-1} ammette un set completo di autovettori, e la sua decomposizione spettrale sarà

$$T^{-1} = \sum_l |l\rangle\frac{1}{\lambda_l}\langle l| \tag{7.7}$$

Infatti

$$\begin{aligned} TT^{-1} &= \sum_{k,l} |k\rangle\lambda_k\langle k|l\rangle\frac{1}{\lambda_l}\langle l| = \sum_{k,l} |k\rangle\lambda_k\delta_{kl}\frac{1}{\lambda_l}\langle l| = \\ &= \sum_k |k\rangle\lambda_k\frac{1}{\lambda_k}\langle k| = \mathbb{I}_{n\times n} \end{aligned}$$

A partire dalla decomposizione spettrale di un operatore T, è possibile definire una *funzione di operatori*:

$$f(T) = \sum_k |k\rangle f(\lambda_k)\langle k| \tag{7.8}$$

Se $f(\lambda_k) \in \mathbb{R}$ per ogni k, allora f è Hermitiano.

Consideriamo adesso un sistema descritto da N coordinate generalizzate $\xi_1, \ldots, \xi_N$, tramite cui è possibile esprimere le coordinate cartesiane $\mathbf{r}_a$ tramite espressioni indipendenti dal tempo, i.e. $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(\xi)$, dove $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$. La Lagrangiana del sistema sarà data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi, \dot{\xi}) &= \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{\mathbf{r}}_a \cdot \dot{\mathbf{r}}_a - U(\mathbf{r}_a) = \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} A_{ij}(\xi)\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - V(\xi) \end{aligned} \tag{7.9}$$

dove

$$A_{ij}(\xi) = \sum_a m_a \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \xi_j}$$

Sia $\bar{\xi}$ un punto di equilibrio stabile del sistema, cioè tale che

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} V(\xi)\bigg|_{\xi_i = \bar{\xi}_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} V(\xi)\bigg|_{\xi_i = \bar{\xi}_i} \equiv V_{ij} = V_{ji} > 0$$

Allora, sviluppando la Lagrangiana (7.9) intorno al punto $\xi = \bar{\xi}$ e introducendo il nuovo set di coordinate generalizzate $q_i \equiv \xi_i - \bar{\xi}_i$ otteniamo

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j \tag{7.10}$$

Le equazioni del moto generate dalla Lagrangiana (7.10) saranno

$$T_{ij} \ddot{q}_j + V_{ij} q_j = 0 \tag{7.11}$$

che costituiscono un sistema differenziale lineare omogeneo nella variabile $q(t) \equiv \{q_1(t), \ldots, q_N(t)\}$. Cercando la soluzione nella forma $q_i(t) = q_i(0) e^{i\omega t}$ troviamo che, posto $q(0) = \{q_1(0), \ldots, q_N(0)\}$,

$$(-\omega^2 T + V) q(0) = 0 \tag{7.12}$$

8 Problema dei due corpi

Consideriamo il moto di due corpi di massa m_1, m_2 descritto in coordinate Cartesiane dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) - V_2(\mathbf{r}_2) - V_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{8.1}$$

dove V_{12} è il potenziale di interazione. Se questo è nullo, i sistemi sono disaccoppiati e possono essere trattati singolarmente. Supponiamo che sul sistema non agiscano campi esterni, i.e. $V_1 = V_2 \equiv 0$. Notiamo che il potenziale di interazione deve essere invariante per traslazione, quindi non può dipendere separatamente da $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Allora $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, dove $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è la *distanza relativa* fra i due corpi. Allora la Lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \tag{8.2}$$

Se applichiamo al sistema una variazione continua, allora il moto dei due corpi sarà descritto dalle medesime equazioni, i.e. la Lagrangiana deve rimanere invariata. Applichiamo al sistema la trasformazione continua

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i \longmapsto \mathbf{r}_i + \epsilon\mathbf{n} \\ \\ \dot{\mathbf{r}}_i \longmapsto \dot{\mathbf{r}}_i \end{cases} \tag{8.3}$$

La variazione della Lagrangiana sarà data da

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{1k}}\delta\dot{r}_{1k} + \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_{2k}}\delta\dot{r}_{2k} - \frac{\partial V}{\partial r_{1k}}\delta r_{1k} - \frac{\partial V}{\partial r_{2k}}\delta r_{2k} = 0$$

Poiché nella trasformazione in questione le velocità non cambiano, $\delta\dot{r}_{1k} = \delta\dot{r}_{2k} = 0$. Dunque,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{\partial V}{\partial r_{1k}}\delta r_{1k} - \frac{\partial V}{\partial r_{2k}}\delta r_{2k} = \text{(Eulero-Lagrange)} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{1k}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_{2k}}\right) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2) = 0 \end{aligned}$$

Da cui deduciamo che la quantità

$$\mathbf{P} \equiv m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 \tag{8.4}$$

detta *impulso totale*, è un integrale primo del moto. A questo punto, definiamo il nuovo set di coordinate generalizzate:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \\ \mathbf{R} \equiv \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \tag{8.5}$$

Dalle (8.5) ricaviamo le espressioni di $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ in funzione delle nuove coordinate $\mathbf{r}, \mathbf{R}$, ottenendo:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \dfrac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - d\frac{m_1}{M}\mathbf{r} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \dfrac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \\ \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \dfrac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}} \end{cases}$$

dove si è posto $M = m_1 + m_2$. Allora la Lagrangiana (8.2), nelle nuove coordinate, diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 - V(\mathbf{r}) = \\
&= \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1 m_2^2}{2M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{m_1 m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2 m_1^2}{2M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) = \\
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Poniamo $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1+m_2)$, detta *massa ridotta*, ottenendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \tag{8.6}$$

Osserviamo che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + \mathcal{L}_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, dunque nel nuovo set di coordinate, riusciamo a scomporre il sistema in due sistemi disaccoppiati.
Consideriamo adesso la Lagrangiana del sistema del centro di massa (i.e. $\dot{\mathbf{R}} \equiv 0$):

$$\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \tag{8.7}$$

Notiamo che se V è funzione del modulo di $\mathbf{r}$, allora non esistono direzioni privilegiate per il moto. Applichiamo adesso una rotazione infinitesima:

$$\begin{cases}
\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \\[2ex]
\delta\mathbf{r} = -\mathbf{n}\times\mathbf{r}\cdot\epsilon = \epsilon\mathbf{r}\times\mathbf{n} \\[2ex]
\delta\dot{\mathbf{r}} = \epsilon\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{n}
\end{cases} \tag{8.8}$$

Scriviamo la variazione della Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{rel} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial r_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k} = \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial r_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r_{\alpha,k} = \text{(Eulero-Lagrange)} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\right)\delta r_{\alpha,k} + \frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta r_{\alpha,k}\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k}\right)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Allora se $\delta\mathcal{L}_{rel} = 0$, i.e. la Lagrangiana (8.7) è invariante per rotazioni, la quantità

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k}$$

è un integrale primo del moto. Si ha in particolare

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{rel}}{\partial \dot{r}_{\alpha,k}}\delta r_{\alpha,k} = \mu\dot{r}_{\alpha,k}\epsilon(\mathbf{r}^a\times\mathbf{n})_k = \text{ costante}$$

che, per l'arbitrarietà di ϵ, si conclude che

$$\mu\dot{r}_{\alpha,k}(\mathbf{r}^a\times\mathbf{n})_k = \text{ costante}$$

Allora

$$\mu\dot{r}_{\alpha,k}(\mathbf{r}^a \times \mathbf{n})_k = \mu\dot{r}_{\alpha,k}\epsilon_{kij}r_{\alpha,i}n_j = n_j\epsilon_{jki}(\mu\dot{r}_{\alpha,k})r_{\alpha,i} = -n_j(\epsilon_{jik}r_{\alpha,i}\mu\dot{r}_{\alpha,k}) = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{L} \tag{8.10}$$

dove

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mu\dot{r}_k \tag{8.11}$$

è il momento angolare totale del sistema.
Data dunque la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{rel} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(|\mathbf{r}|) \tag{8.12}$$

e la variazione infinitesima $\delta\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}\delta\varphi$, sappiamo che sotto queste condizioni $\delta\mathcal{L}_{rel} = \delta\phi n_a(\epsilon_{abc}r_b\mu\dot{r}_c) = \delta\phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{L} = 0$. Calcoliamo adesso

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}(t) = r_aL_a = \epsilon_{abc}r_ar_b\mu\dot{r}_c = 0 \quad \forall t \tag{8.13}$$

Deduciamo dunque che, fissato $\mathbf{L}$, l'orbita in ogni istante è perpendicolare a $\mathbf{L}$, dunque il moto e piano.
Calcoliamo adesso l'area spazzata dal raggio vettore tra gli istanti t e $t + \delta t$:

$$\delta A = r \cdot r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\delta t = r^2\dot{\varphi}\delta t$$

Definiamo dunque la *velocità areolare*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = r^2\dot{\varphi} \tag{8.14}$$

Poiché, in coordinate sferiche, $|\mathbf{L}| = \mu r^2\dot{\varphi}$, possiamo esprimere la velocità areolare in termini del momento angolare come

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathbf{L}|}{\mu} \tag{8.15}$$

Scriviamo adesso la Lagrangiana (8.12) in coordinate sferiche:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r) \tag{8.16}$$

Fissiamo $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

se sostituiamo adesso $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$, otteniamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - V(r)$$

ma questa espressione risulta sostanzialmente errata in quanto le variazioni che abbiamo effettuato non sono indipendenti. Passiamo dunque a considerare l'energia:

$$E = \frac{1}{2}(M\dot{r}^2 + \mu r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \tag{8.17}$$

Possiamo adesso sostituire $\dot{\varphi} = L^2/(\mu r^2)$, ottenendo

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \tag{8.18}$$

dove

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \tag{8.19}$$

è detto *potenziale efficace*.

8.1 Potenziale gravitazionale

Fissiamo adesso $V(r) = -k/r$, $k > 0$. Questa è la tipica espressione di un potenziale di tipo gravitazionale. Si ha dunque

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \Longrightarrow \mathrm{d}\varphi = \frac{L}{\mu r^2}\mathrm{d}t$$

Ossia:

$$\frac{\mu r^2}{L}\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \frac{L}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

Poniamo $u = 1/r$, ottenendo:

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$$

Allora risulta

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} \tag{8.20}$$

Scriviamo adesso l'energia in funzione di u:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\mu\frac{L^2}{\mu^2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right) + \frac{L^2}{2\mu}u^2 - ku = \\ &= \frac{L^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right] - ku \end{aligned} \tag{8.21}$$

Imponendo $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\varphi = 0$, otteniamo l'equazione:

$$u'' + u = \frac{\mu k}{L^2} \tag{8.22}$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico soggetto ad una forza esterna costante. Le soluzioni della (8.22) saranno date da

$$u = A\cos(\varphi + \varphi_0) + \frac{\mu k}{L^2}$$

Possiamo fissare $\varphi_0 = 0$ e sostituire $u = 1/r$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A\cos\varphi \tag{8.23}$$

dove $p = L^2/(\mu k)$. Osserviamo che si ha $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$, quindi l'orbita è chiusa e il moto è periodico. Riscriviamo la (8.23) nella forma:

$$\frac{p}{r} = pA\cos\varphi + 1$$

Poniamo $pA = \varepsilon$:

$$p = r + r\varepsilon\cos\varphi$$

In coordinate Cartesiane si ha

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x \Longrightarrow p - \varepsilon x = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + y^2$$

Ovvero

$$p^2 = (1 - \varepsilon^2 x^2) + 2p\varepsilon x + y^2 = (1 - \varepsilon^2)\left(x^2 - 2\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}x + \left(\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2\right) - \frac{\varepsilon^2 p^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2$$

Avendo aggiunto e sottratto la quantità $\varepsilon^2 p^2/(1-\varepsilon^2)$ per completare il quadrato:

$$\left(1-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)p^2 = (1-\varepsilon^2)\left(x-\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + y^2$$

Posto $x_C = \varepsilon p/(1-\varepsilon^2)$ otteniamo

$$(1-\varepsilon^2)(x-x_C)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

Cioè

$$\frac{(x-x_C)^2}{\dfrac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{p^2}{1-\varepsilon^2}} = 1 \tag{8.24}$$

che, a seconda del valore di ε, detto *eccentricità*, può rappresentare le seguenti orbite:

$$\begin{cases} \varepsilon < 1 \Longrightarrow \text{ l'orbita è un'ellisse} \\ \varepsilon = 0 \Longrightarrow \text{ l'orbita è una circonferenza} \\ \varepsilon > 1 \Longrightarrow \text{ l'orbita è un'iperbole} \end{cases} \tag{8.25}$$

Adesso costruiamo un'altra costante del moto nel caso del potenziale gravitazionale. Sappiamo che

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} = \text{ costante}$$

Definiamo il *vettore di Lenz*:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} + km\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{8.26}$$

Osserviamo innanzitutto che il vettore di Lenz è perpendicolare al momento angolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{L} &= \mathbf{p}\times\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} + \frac{km}{r}\mathbf{r}\cdot\mathbf{L} = \\ &= \mathbf{L}\times\mathbf{L}\cdot\mathbf{p} = 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo quadro di $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= p^2L^2 + k^2m^2 + 2\frac{mk}{r}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \\ &= 2m\left(E-\frac{k}{r}\right)L^2 + k^2m^2 + \frac{2km}{r}\mathbf{L}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = \\ &= 2mEL^2 - \frac{2mkL^2}{r} + k^2m^2 + \frac{2kmL^2}{r} = 2mEL^2 + k^2m^2 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Consideriamo infine la quantità

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L} = \\
&= \mathbf{F}\times\mathbf{L} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\times\mathbf{L} = \\
&= -\frac{mk}{r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = \\
&= -\frac{mk}{r^3}(r^2\mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = \\
&= -mk\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \mathbf{r}\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = \\
&= -mk\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{r}}{r}
\end{aligned}
$$

Allora $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) + mk(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\mathbf{r}/r) = 0$, cioè, per linearità della derivata:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} + mk\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.28}
$$

e questo dimostra che il vettore di Lenz è una costante del moto.

9 Trasformazioni

Consideriamo un generico sistema descritto in un sistema di coordinate generalizzate $q = \{q_1, \dots, q_N\}$ dalla Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Le equazioni del moto si otterrano dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

In un secondo set di coordinate generalizzate $Q = \{Q_1, \dots, Q_N\}$, legato al primo dalla relazione $q = q(Q, t)$, si ha

$$\mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0$$

Inoltre, per il principio di invarianza in valore,

$$\mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L}(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) \tag{9.1}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\cdot\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\cdot\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\cdot\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} =\end{aligned}$$

Ricordando che $\partial \dot{q}_k / \partial \dot{Q}_i = \partial q_k / \partial Q_i$, si ottiene

$$= \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial Q_i}q_k - \frac{\partial}{\partial Q_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_k\right)$$

Il secondo termine è identicamente nullo. Allora otteniamo la relazione tra le equazioni di Eulero-Lagrange generate da $\mathcal{L}$ e quelle generate da $\mathcal{L}'$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_i} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right] \tag{9.2}$$

$\partial q_k / \partial Q_i$ rappresenta l'elemento di posto (k, i) della matrice Jacobiana della trasformazione. Poiché la trasformazione può essere invertita, la Jacobiana risulterà invertibile.

10 Formalismo Hamiltoniano

Si definisce *Hamiltoniana* la funzione:

$$\mathcal{H}(q,\dot{q},p,t) \equiv p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) \tag{10.1}$$

Vogliamo adesso che $\mathcal{H}$ non sia funzione delle velocità generalizzare $\dot{q}$: differenziando, si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{H} &= p\mathrm{d}\dot{q} + \dot{q}\mathrm{d}p - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\mathrm{d}\dot{q} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t = \\ &= \left(p - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\mathrm{d}\dot{q} + \dot{q}\mathrm{d}p - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Se imponiamo $p \overset{!}{=} \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, $\mathcal{H}$ non dipende da $\dot{q}$. Si ha dunque:

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\dot{q}\mathrm{d}t - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\dot{p}\mathrm{d}t + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\mathrm{d}q - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{10.2}$$

Si ottengono pertanto le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{H}/\partial t = -\partial\mathcal{L}/\partial t \\ \\ \partial\mathcal{H}/\partial q = -\partial\mathcal{L}/\partial q = (\text{E-L}) = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q} = -\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = dotp \\ \\ \partial\mathcal{H}/\partial p = \dot{q} \end{cases} \tag{10.3}$$

da cui ricaviamo le *equazioni di Hamilton*:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k} \tag{10.4}$$

Il vantaggio del formalismo Hamiltoniano consiste nel dover risolvere, per un sistema con n gradi di libertà, $2n$ equazioni differenziali del prim'ordine anziché n del secondo ordine del formalismo Lagrangiano.

11 Trasformazioni canoniche infinitesime

Consideriamo una generica Hamiltoniana $H(q,p,t)$ e la trasformazione

$$\begin{cases} q_i \longmapsto Q_i \equiv q_i + \epsilon f_i(q,p,t) \\ \\ p_i \longmapsto P_i \equiv p_i + \epsilon g_i(q,p,t) \end{cases} \tag{11.1}$$

Sia infine $\mathcal{K}(Q,P,t)$ l'Hamiltoniana scritta in termini delle nuove coordinate. Vogliamo ricavare delle condizioni sulle funzioni $h(q,p,t)$ tali che

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \epsilon h(q,p,t) = \mathcal{K}(Q,P,t), \qquad \begin{cases} q \equiv q(Q,P,t) \\ \\ p \equiv p(Q,P,t) \end{cases}$$

Si ha innanzitutto che

$$h(q,p,t) = \frac{1}{\epsilon}[\mathcal{H}(q,p,t) - \mathcal{K}(Q,P,t)] \tag{11.2}$$

Derivo rispetto a q_i:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial q_i} &= \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right] = \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[-\dot{P}_k\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \dot{Q}_k\frac{\partial P_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right] = \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[-\left(\dot{p}_k + \epsilon\frac{\partial g_k}{\partial t}\right)\left(\delta_{ki} + \epsilon\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right) + \left(\dot{q}_k + \epsilon\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t}\right)\left(\epsilon\frac{\partial g_k}{\partial q_i}\right) + \dot{p}_i\right] = \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[-\dot{p}_i\epsilon\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t} - \epsilon\dot{p}_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \epsilon^2\frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \dot{q}_k\epsilon\frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \epsilon^2\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right] =
\end{aligned}$$

Trascurando i termini in ϵ^2 otteniamo

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{1}{\epsilon}\left[-\dot{p}_i - \epsilon\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t} - \epsilon\dot{p}_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \epsilon\dot{q}_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \dot{p}_i\right] = \\
&= -\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t} - \dot{p}_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i} + \dot{q}_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i} \simeq \\
&\simeq -\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial g_i}{\partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial g_i}{\partial p_k}\dot{p}_k - \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\dot{p}_k + \frac{\partial g_k}{\partial q_i}\dot{q}_k
\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\frac{\partial h}{\partial q_i} \simeq -\frac{\partial g_i}{\partial t} + \dot{q}_k\left(\frac{\partial g_k}{\partial q_i} - \frac{\partial g_i}{\partial q_k}\right) - \dot{p}_k\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_k} + \frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right) \tag{11.3}$$

e similmente

$$\frac{\partial h}{\partial p_i} \simeq \frac{\partial f_i}{\partial t} + \dot{q}_k\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \frac{\partial g_k}{\partial q_i}\right) + \dot{p}_k\left(\frac{\partial f_k}{\partial p_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right) \tag{11.4}$$

Per garantire la compatibilità delle soluzioni, imponiamo le condizioni:

$$\begin{cases}
\partial g_k/\partial q_i = \partial g_i/\partial q_k \\
\partial f_k/\partial p_i = \partial f_i/\partial p_k \\
\partial g_i/\partial p_k + \partial f_k/\partial q_i = 0
\end{cases} \implies \begin{cases} g_i = \partial g/\partial q_i \\ f_i = \partial f/\partial p_i \end{cases} \tag{11.5}$$

per ogni i, k. Si ha inoltre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_k \partial q_i} + \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial p_k} = 0 \tag{11.6}$$

da cui segue che deve essere necessariamente $g = -f$. Si ottengono dunque le condizioni

$$\begin{cases}
\partial h/\partial q_i = (\partial/\partial t)\partial f/\partial q_i \\
\partial h/\partial p_i = (\partial/\partial t)\partial f/\partial p_i
\end{cases} \implies h = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{11.7}$$

Allora le *trasformazioni canoniche infinitesime* saranno della forma

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \epsilon\frac{\partial f}{\partial t}(q,p,t) = \mathcal{K}(Q,P,t) \tag{11.8}$$

Vogliamo adesso sapere quale trasformazione canonica si ottiene scegliendo $f(q,p,t) \equiv \mathcal{H}(q,p,t)$. In questo caso, si ottiene:

$$\begin{cases} q_k \longmapsto q_k + \epsilon(\partial\mathcal{H}/\partial p_k) = q_k(t) + \epsilon\dot{q}_k \simeq q_k(t+\epsilon) \\ \\ p_k \longmapsto p_k - \epsilon(\partial\mathcal{H}/\partial q_k) = p_k(t) + \epsilon\dot{p}_k \simeq p_k(t+\epsilon) \end{cases} \tag{11.9}$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(Q,P,t) &= \mathcal{K}\left(q + \epsilon\frac{\partial f}{\partial p}, p - \epsilon\frac{\partial f}{\partial q}, t\right) = \\ &= \mathcal{H}(q,p,t) + \epsilon\frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \mathcal{H}(q,p,t) + \epsilon\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \epsilon\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{11.10}$$

Quindi:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{11.11}$$

In particolare, si osserva che tutte le funzioni generatrici di trasformazioni canoniche sono costanti del moto.

12 Parentesi di Poisson e proprietà

Date il set di coordinate canoniche $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, $p = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e due funzioni $F(q,p,t), G(q,p,t)$ si definisce *parentesi di Poisson* delle funzioni F, G:

$$[F,G] \equiv \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right) \tag{12.1}$$

Riprendendo l'equazione (11.11) si ha

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f,\mathcal{H}] \tag{12.2}$$

Proprietà

1. $[F,G] = -[G,F]$

2. $[F, \alpha G + \beta H] = \alpha[F,H] + \beta[F,G]$

3. $[\alpha F + \beta G, H] = \alpha[F,G] + \beta[G,H]$

4. $[F, GH] = G[F,H] + [F,G]H$

5. $[F,[G,H]] + [G,[F,H]] + [H,[F,G]] = 0$

Parentesi di Poisson canoniche

$$\begin{cases} [q_i(t), q_j(t)] = [p_i(t), p_j(t)] = 0 \quad \forall i,j \\ \\ [q_i(t), p_j(t)] = \delta_{ij} \end{cases} \tag{12.3}$$